الدوال العددية

الاستمرار.

تعريف

نقول عن دالة f . أنها مستمرة على مجموعة $D_f \sqsupseteq A$ إذا كانت المجموعة A لا تحوي قيم ينقطع عندها البيان G_f.

مثال.

الدالة $f(x) = ax + b$ مستمرة على $\mathbb{R}$ لأن بيانها عبارة عن مستقيم.

تدقيق.

بعد تصفح الحالات الممكنة هندسيا نستخلص ما يلي:

تكون دالة f مستمرة على مجموعة ما إذا كانت f مستمرة عند جميع القيم التي تحويها هذه المجموعة.

تكون دالة f مستمرة عند قيمة $D_f \ni a$ إذا كانت f مستمرة على يمين a و على يسار a .

تكون دالة f مستمرة على يمين $D_f \ni a$ إذا كانت $\lim_{x>\to a} f(x) = f(a)$ (النهاية تساوي الصورة).

ملاحظة

النهايات تعرف بطريقة هندسية و يبين باستعمال هذا التعريف أن عملية حساب النهايات تتلاءم مع الجمع؛ الجداء؛ حاصل القسمة التركيب و عملية القلب بين الصورة و السابقة و مع المتباينات الواسعة.

نتيجة.

مجموع؛ جداء؛ حاصل قسمة؛ تركيب دالتين مستمرتين هي دالة مستمرة.

الدالة العكسية لدالة مستمرة هي دالة مستمرة.

حالات تطبيقية

دالة كثير الحدود مستمرة على مجموعة تعريفها و قد تكون لها حالة عدم التعيين بجوار ∞ تزال باستخراج الحد ذو أكبر أس كعامل مشترك

الدالة الناطقة مستمرة على مجموعة تعريفها و قد تكون لها حالة عدم التعيين بجوار ∞ تزال بالاختزال بعد استخراج الحد ذو أكبر أس كعامل مشترك في كل من البسط و المقام وقد تكون لها حالة عدم التعيين بجوار القيم التي تعدم المقام تزال بالاختزال بعد التحليل

الدالة الجذرية لها حالات عدم التعيين مماثلة لدالة الناطقة و تزال بنفس الطريقة و قد نستعمل المرافق للتخلص من الجذر.

الدالة اللوغارتمية مستمرة على مجموعة تعريفها و نزيل حالات عدم التعيين المتعلقة بها باستعمال النهايات الشهيرة و الخواص الجبرية للدالة اللوغارتمية إذا كان ما داخل الدالة اللوغارتمية يؤول إلى $+\infty$ أو يؤول إلى الصفر. أما إذا كان ما داخل الدالة اللوغارتمية يؤول إلى عدد غير معدوم فنستعمل قاعدة لوبتال.

الدالة الأسية مستمرة على مجموعة تعريفها و نزيل حالات عدم التعيين المتعلقة بها باستعمال النهايات الشهيرة و الخواص الجبرية للدالة الأسية إذا كان ما داخل الدالة الأسية يؤول إلى ∞ . أما إذا كان ما داخل الدالة الأسية يؤول إلى عدد فنستعمل قاعدة لوبتال

الدوال المثلثية مستمرة على مجموعة تعريفها ونستعمل كونها محصورة لدراسة نهايتها إذا كان ما داخلها يؤول إلى ∞ و نستعمل قاعدة لوبتال إذا كان ما داخلها يؤول إلى عدد

<u>مثال</u>

$\lim_{x\to+\infty} x^2+5x-7$ $\lim_{x\to-\infty} x^2+5x-7$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-3}{x^2-x-6}$ $\lim_{x\to-2} \frac{3x-9}{x^2-x-6}$

$\lim_{x\to3} \frac{3x-9}{x^2-x-6}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-3}{x^2-x-6}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-8}{x^2-x-6}$ $\lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{x^2+x-6}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-x$ $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}+x$ $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1}+x$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3-1}-x$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-5x+1}-x$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-5x$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{2x^2+x}-\sqrt{x^3+1}$ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-\sqrt[3]{x^3+5x^2+3}$

$\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-x-6}$ $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-5+x}{x^2-9}$ $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x^2-11}}{\sqrt{x^3+8}-2x}$ $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

$\lim_{x\to+\infty} Ln(x^3+2x-1)-\sqrt{x}$ $\lim_{x\to1} \sqrt{x-1}\cdot Ln(x^3-1)$ $\lim_{x\to1} \frac{Ln(x)}{\sqrt{x-1}}$

$\lim_{x\to+\infty} x^2+5x+3-e^{\sqrt{x}}$ $\lim_{x\to-\infty} e^x(x-x^2)$ $\lim_{x\to+\infty} 3x-Ln\left(e^{2x}+\sqrt{x}\right)$

$\lim_{x\to0} \frac{e^x-\sqrt{x+1}}{Ln(1-x)}$ $\lim_{x\to+\infty} xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\lim_{x\to+\infty} xLn(x+1)-xLn(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin(x^2+1)}{e^x}$ $\lim_{x\to0} \frac{e^x-\cos(x)}{Ln(x+1)}$ $\lim_{x\to0} \frac{x\sin(x)}{\cos(x)-1}$

$\lim_{x\to0} xLn(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lim_{x\to0} \frac{Ln(\cos(x))}{(\sin(x))^2}$ $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)Ln(x)$

خواص الدوال المستمرة

نظرية القيم المتوسطة

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a\ ,\ b]$

إذا كان $f(a)\cdot f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a\ ,\ b[$

البرهان

نأخذ بعين الاعتبار المجموعة $\Delta= \{x \in [a\ ,\ b]\ :f(x) < 0\}$ و ليكن $c = Sup(\Delta)$

نبين بالحلف أن $f(c) = 0$

نتيجة

إذا كانت f دالة مستمرة و متزايدة على المجال $[a\ ,\ b]$ فإن $f([a\ ,\ b]) = [f(a)\ ,\ f(b)]$

إذا كانت f دالة مستمرة و متناقصة على المجال $[a\ ,\ b]$ فإن $f([a\ ,\ b]) = [f(b)\ ,\ f(a)]$

إذا كانت f دالة مستمرة ومتزايدة على المجال $]a\ ,\ b[$ فإن $f(]a\ ,\ b[) =]\alpha\ ,\ \beta[$ حيث
$$\begin{cases}\alpha = \lim_{x\to a} f(x)\\ \beta = \lim_{x\to b} f(x)\end{cases}$$

إذا كانت f دالة مستمرة ومتزايدة على المجال $]a\ ,\ b[$ فإن $f(]a\ ,\ b[) =]\beta\ ,\ \alpha[$ حيث
$$\begin{cases}\alpha = \lim_{x\to a} f(x)\\ \beta = \lim_{x\to b} f(x)\end{cases}$$

بصفة أعم صورة مجال <u>مغلق</u> بواسطة دالة مستمرة هو مجال <u>مغلق</u>

الاشتقاق

تعريف

لتكن f دالة من $\Re$ نحو $\Re$ وليكن $a \in D_f$

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق على يمين a إذا كانت $\lim_{x>\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta \in \Re$ و العدد β يسمى مشتق الدالة f على يمين a

إذا كان مشتق الدالة f على يمين a يساوي مشتقها على يسار a فيقال الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و قيمة تلك النهاية تسمى مشتق الدالة f عند a

يقال عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق على مجال $I \subseteq D_f$ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند جميع قيم هذا المجال

الدالة التي ترفق بكل عنصر من مجموعة تعريف الدالة f مشتق الدالة f عند هذا العنصر(إن وجد المشتق) تسمى الدالة المشتقة للدالة f و يرمز لها بالرمز $f^{\backslash}$

مثال

*) الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق عند القيمة 1 و $f^{\backslash}(1) = \frac{1}{2}$ لأن

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

*) الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند القيمة 0 لأن

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

*) الدالة $f(x) = \delta x + \beta$ قابلة للاشتقاق عند أي قيمة $a \in \Re$ و $f^{\backslash}(a) = \delta$ لأن

$$\lim_{x\to a} \frac{(\delta x + \beta) - (\delta a + \beta)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\delta(x - a)}{x - a} = \delta$$

*) الدالة $f(x) = sin(x)$ قابلة للاشتقاق عند أي قيمة $a \in \Re$ و $f^{\backslash}(\quad) = cos(a)$ لأن

$$\lim_{x\to a} \frac{sin(x) - sin(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{2cos\left(\frac{x+a}{2}\right) sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{2\frac{x-a}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{sin(y)}{y} \cdot cos(y + a) = cos(a)$$

التعريف الذي ذكر في بداية الدرس يستعمل لدراسة الاشتقاق عند قيمة أما لدراسة الاشتقاق على مجال أو لحساب الدالة المشتقة نستعمل ما يلي

نظرية

مجموع؛ جداء؛ حاصل قسمة؛ تركيب دالتين قابلتين للاشتقاق هي دالة قابلة للاشتقاق و الدالة العكسية لدالة قابلة للاشتقاق و ذات مشتق غير معدوم هي دالة قابلة للاشتقاق و لدينا القواعد التالية.

$$[f(x) + g(x)]^{\backslash} = f^{\backslash}(x) + g^{\backslash}(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]^{\backslash} = f^{\backslash}(x)g(x) + f(x)g^{\backslash}(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{\backslash} = \frac{f^{\backslash}(x)g(x) - f(x)g^{\backslash}(x)}{g^2(x)}$$

$$(g[f(x)])^{\backslash} = g^{\backslash}(y) \cdot f^{\backslash}(x) \quad avec \quad y = f(x)$$

$$[f^{-1}(x)]^{\backslash} = \frac{1}{f^{\backslash}(y)} \quad avec \quad \begin{cases} x = f(y) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$$

العبارات العامة للمشتقات

$$[f^{\alpha}(x)]^{\backslash} = f^{\backslash}(x) \cdot f^{\alpha-1}(x)$$

$$(Ln[f(x)])^{\backslash} = \frac{f^{\backslash}(x)}{f(x)}$$

$$\left[e^{f(x)}\right]^{\backslash} = f^{\backslash}(x) \cdot e^{f(x)}$$

$$f^{\backslash}(x) = f(x) \cdot (Ln[f(x)])^{\backslash}$$

$$(sin[f(x)])^{\backslash} = f^{\backslash}(x) \cdot cos[f(x)]$$

$$(cos[f(x)])^{\backslash} = -f^{\backslash}(x) \cdot sin[f(x)]$$

$$(tg[f(x)])^{\backslash} = \frac{f^{\backslash}(x)}{(cos[f(x)])^2} = f^{\backslash}(x) \cdot [1 + (tg[f(x)])^2]$$

$$(cotg[f(x)])^{\backslash} = \frac{-f^{\backslash}(x)}{(sin[f(x)])^2} = -f^{\backslash}(x) \cdot [1 + (cotg[f(x)])^2]$$

الدوال المثلثية العكسية

الدوال المثلثية ليست دوال متباينة على $\mathfrak{R}$ لأنها دوال دورية لكن إذا اقتصرت الدالة $sin(x)$ على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$ والدالة $cos(x)$ عل المجال $[0 , \pi]$ و الدالة $tg(x)$ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right[$ و الدالة $cotg(x)$ على المجال $]0 , \pi[$ فهي دوال رتيبة و بالتالي يمكن الأخذ بعين الاعتبار الدالة العكسية لكل منها.

تعريفا لدينا:

$Arcsin: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.

$$x \rightarrow Arcsin(x) = a \;\; tq \;\; sin(a) = x$$

$Arccos: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.

$$x \rightarrow Arccos(x) = b \;\; tq \;\; cos(b) = x$$

$Arctg: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.

$$x \rightarrow Arctg(x) = c \;\; tq \;\; tg(c) = x$$

$Arccotg: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$.

$$x \rightarrow Arccotg(x) = d \;\; tq \;\; cotg(d) = x$$

حسب قانون مشتق الدالة العكسية فإن:

$$[Arcsin(x)]^\backslash = \frac{1}{sin^\backslash(a)} = \frac{1}{cos(a)} = \frac{1}{\sqrt{1-[sin(a)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[Arccos(x)]^\backslash = \frac{1}{cos^\backslash(b)} = \frac{1}{-sin(b)} = \frac{-1}{\sqrt{1-[cos(b)]^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$[Arctg(x)]^\backslash = \frac{1}{tg^\backslash(c)} = \frac{1}{1+[tg(c)]^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$[Arccotg(x)]^\backslash = \frac{1}{cotg^\backslash(d)} = \frac{1}{-(1+[cotg(d)]^2)} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

و باستعمال قانون مشتق تركيب دالتين نجد:

$$\left[Arcsin\left(f(x)\right)\right]^\backslash = \frac{[f(x)]^\backslash}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$\left[Arccos\left(f(x)\right)\right]^\backslash = \frac{-[f(x)]^\backslash}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$\left[Arctg\left(f(x)\right)\right]^\backslash = \frac{[f(x)]^\backslash}{1+[f(x)]^2}$$

$$\left[Arccotg\left(f(x)\right)\right]^\backslash = \frac{-[f(x)]^\backslash}{1+[f(x)]^2}$$

من جدول تغيرات الدوال المثلثية يمكن استنتاج جدول التغيرات الدوال المثلثية العكسية كما أنه يمكن استنتاج صور بعض القيم الشهيرة بواسطة الدوال المثلثية العكسية و ذالك وفق العلاقة $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

نلفت الانتباه إلى أن:

مجموعة تعريف $Arcsin[f(x)]$ هي $\{x \in D_f \ \ tq \ -1 \leq f(x) \leq 1\}$.

مجموعة تعريف $Arccos[f(x)]$ هي $\{x \in D_f \ \ tq \ -1 \leq f(x) \leq 1\}$.

مجموعة تعريف $Arctg[f(x)]$ هي D_f .

مجموعة تعريف $Arccotg[f(x)]$ هي D_f .

خواص أساسية

خاصية

لتكن f دالة تقبل ذروة عند قيمة a

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند a فإن $f^\backslash(a) = 0$.

البرهان

يكفي ملاحظة أن المشتق على يمين a و المشتق على يسار a متساويين و مختلفين في الإشارة

نظرية روول

لتكن f دالة مستمرة على $[a \;,\; b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a \;,\; b[$.

إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن الدالة المشتقة f' تنعدم في المجال $]a \;,\; b[$.

البرهان

نبين أن الدالة f تقبل ذروة في المجال $]a \;,\; b[$.

نظرية التزايدات المنتهية

إذا كانت f دالة مستمرة على $[a \;,\; b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a \;,\; b[$

فإن $(b) - f(a) = f'(c) \cdot [b - a]$ حيث $c \in]a \;,\; b[$.

البرهان

نستعمل نظرية روول على الدالة $F(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) - f(x) + \beta$.

تعميم نظرية التزايدات المنتهية

إذا كانت $f \,, g$ دالتين مستمرتين على $[a \;,\; b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a \;,\; b[$ مع كون مشتق g لا ينعدم على $]a \;,\; b[$ فإن $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ حيث $c \in]a \;,\; b[$.

البرهان

نستعمل نظرية روول على الدالة $H(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)] + f(a) - f(x) + \beta$.

ملاحظة

هذه النظريات لها استعمالات كثيرة وسنعاين بعض الأمثلة في الأعمال الموجهة و أما فوائدها فتظهر عند استعمالها مع دوال معرفة بطريقة غير مباشرة كالدوال الأصلية.

بواسطة النظرية الأخيرة يمكن برهنة قاعدة لوبتال

قاعدة لوبتال

لتكن الدالة $h(x) = \frac{f(x)-f(a)}{f(x)-g(a)}$ حيث $f(x) \;,\; g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح حيث يكون أحد حديه a .

إذا كانت النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة فإن الدالة $h(x)$ تؤول إلى نفس النهاية لما x يؤول إلى a .